

## Моделювання впливу площинних дефектів на пластичність порошкових матеріалів обчислювальними методами мікромеханіки

А. В. Кузьмов<sup>1,2\*</sup>, М. Б. Штерн<sup>1,2</sup>, П. О. Коробко<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Інститут проблем матеріалознавства ім. І. М. Францевича НАН України  
Україна, 03142, Київ, вул. Кржижановського, 3

\*E-mail: [kavipms326@gmail.com](mailto:kavipms326@gmail.com)

<sup>2</sup>Національний технічний університет України "Київський політехнічний  
інститут імені Ігоря Сікорського"  
Україна, 03056, Київ, пр-кт Перемоги, 37

*На базі енергетичної концепції граничного напруженого стану сформульовано трипараметричну модель пластичності типу Cam-Clay. Для цієї феноменологічної моделі методом мікромеханічного осереднення на представницькому осередку, що відповідає пористому пошкодженому матеріалу порошкового походження, були знайдені залежності визначальних параметрів від пористості та пошкодженості. Мікромеханічне осереднення здійснювалось за методом комп'ютерного моделювання на адаптивній сітці скінченних елементів. За результатами моделювання, зокрема, виявилось, що границя текучості на зсув суттєво менш чутлива до пошкодженості, ніж границя текучості на одновісний розтяг.*

**Ключові слова:** теорія пластичності, порошкові матеріали, мікромеханіка, напружено-деформований стан.

### Вступ

Для обробки тиском порошкових і композиційних матеріалів важливо оцінити зміну структури матеріалу з метою прогнозування руйнування або погіршення властивостей в ході технологічного процесу. Складність цієї задачі полягає в необхідності враховувати фізико-механічні процеси, що відбуваються, зокрема, на різних масштабних рівнях. Це потребує як розгляду макроскопічного напружено-деформованого стану у різних точках заготовки, що деформується, так і аналізу процесів у масштабах структури гетерогенного матеріалу. В своїх попередніх роботах автори торкалися цієї проблеми на мезоструктурному рівні шляхом моделювання виникнення локалізації пластичної деформації внаслідок початково неоднорідного розподілу поля густини [1], при цьому не досліджуючи макроскопічної реології мікронеоднорідного пористого матеріалу. Втім, для знаходження напружено-деформованого стану в середині заготовки, що деформується, необхідно знати, хоча б на якісному рівні, залежність механічних властивостей (тобто закону пластичної течії) від структури матеріалу, або, в спрощеній постановці хоча б від деяких найважливіших параметрів, що її характеризують. Вирішенню задачі такого типу й присвячена дана робота.

**Метою** роботи є оцінка ефективної пластичної реакції порошкових та композиційних матеріалів, структура яких характеризується наявністю двох типів дефектів — сферичних пор та щілиноподібних дефектів. Робота базується на гіпотезі про ізотропію порошкових матеріалів як

на стадії пружної поведінки так і під час переходу від пружного до пластичного стану. Додатково припускається, що матеріал може по різному реагувати на зовнішнє навантаження за умов стиснення та розтягу. Така поведінка характерна для сирих порошкових напівфабрикатів та недоспечених пористих матеріалів. Також наведені типи дефектів характерні до композитів матриця – вкраплення за рахунок утворення щілин на міжфазній межі. Для таких матеріалів пропонується міра пошкодженості пов'язана зі структурою матеріалу. Відповідно знаходиться залежність релогічних властивостей пористого матеріалу як від відносної густини так і від вищезгаданої міри пошкодженості.

### Пластичність пористих матеріалів різноопірних розтягу та стиску

З метою отримання виразу границі текучості в даній роботі використовується досить простий і в той же час фізично обґрунтований шлях, заснований на енергетичній концепції граничного стану. У випадку пружного тіла, описуваного в рамках узагальненого закону Гука, зазначений шлях приводить до границі текучості Мізеса для пластично нестисливих матеріалів. У тому випадку якщо матеріал є пластично стисливим, подібний шлях приводить до виразу щодо границі пружності, якій в просторі головних напружень відповідає еліпсоїд обертання щодо гідростатичної осі, симетричний щодо початку координат [2]. В даній роботі була використана модель пружності різноопірного матеріалу, раніше розвинена одним з авторів [3], яка описується питомою пружною енергією як функцією двох аргументів  $(\varepsilon, \gamma)$  - об'ємного розширення та інтенсивності зсувних деформацій відповідно

$$W(\varepsilon, \gamma) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{K\varepsilon^2 + 2G\gamma^2} - \sqrt{Km\varepsilon}}{1+m} \right)^2, \quad (1)$$

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}; \quad \gamma^2 = \sum_{i,j=1}^3 \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon \delta_{ij} \right)^2$$

Параметр  $0 < m < 1$  є мірою різноопірності матеріалу. За умови  $m = 0$ , різноопірність відсутня і матеріал стає звичайним пружним матеріалом з об'ємним та зсувними модулями  $K$  і  $G$  відповідно. Натомість, за умови, що  $m = 1$  матеріал перестає опиратись всебічному розтягу. На основі визначальних співвідношень, асоційованих із виразом (1), було знайдено додаткову роботу пружного деформування  $U$ , що відповідає (1), як функцію інваріантів  $(p, \tau)$  — тиску та октаедричних напружень відповідно.

$$U(p, \tau) = \frac{1}{2(1-m)^2} \left( \sqrt{\frac{p^2}{K} + (1-m^2) \frac{\tau^2}{2G} + \frac{mp}{\sqrt{K}}} \right)^2, \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}; \quad \tau^2 = \sum_{i,j=1}^3 (\sigma_{ij} - p \delta_{ij})^2$$

Енергетична концепція граничного стану для пористого тіла, за умови, що пластична течія матеріалу каркасу описується умовою текучості

Мізеса (з границею текучості  $\tau = \tau_0$ ), полягає в тому [3], що додаткова енергія пружного деформування  $U$  прирівнюється до величини  $\frac{\tau_0^2}{4G_0} \rho$ , де

$\rho$  — відносна густина пористого матеріалу;  $G_0$  — модуль зсуву нестисливого матеріалу каркасу. Отримане рівняння і буде шуканою умовою пластичності для пористого матеріалу. В нашому випадку одержуємо умову пластичності в просторі головних напружень у вигляді еліпсоїда обертання щодо гідростатичної осі, зміщеного відносно початку координат на величину, яка пропорційна параметру  $m$ .

$$\frac{(p - m\tilde{\sigma}\sqrt{\psi})^2}{\psi} + \frac{\tau^2}{\phi} = \tilde{\sigma}^2; \quad \psi = \frac{K}{2G_0}; \quad \phi = \frac{G}{G_0}; \quad \tilde{\sigma} = \frac{\tau_0\sqrt{\rho}}{1+m}. \quad (3)$$

У літературі перше рівняння (3) відомо як модифікована умова досягнення граничного стану Cam-Clay [9]. Вона широко використовується в теорії пластичності незворотно стисливих матеріалів, зокрема пористих тіл. Контур поверхонь, що описуються умовою (3) в  $(p, \tau)$  площині за різних  $m$ , наведено на рис. 1. Поряд з геомеханікою, механікою ґрунтів і гірських порід умова (3) активно застосовується для моделювання процесів компактування порошків і обробки тиском пористих матеріалів. Дана умова досить добре узгоджується з експериментальними даними [2, 4—8] по визначенню поверхні навантаження в теоріях пластичності стисливих матеріалів та інших численних дослідженнях. Умова (3) також може розглядатися як гранична і по відношенню до крихкого руйнування. Зокрема, на основі експериментів по руйнуванню графіту в ході одновісного навантаження, поєднаного із зсувом, в роботі [7] встановлено, що контур руйнування має вигляд, представлений на рис. 2.

#### Встановлення зв'язку між структурою матеріалу та реологічними константами обчислювальними методами мікромеханіки

Енергетична концепція граничного напруженого стану для ізотропного матеріалу приводить до трипараметричної поверхні текучості, що відповідає модифікованій моделі Cam-Clay [9]. Для знаходження цих параметрів моделювали пружну поведінку матеріалу, що містить опуклі пори між частинками і відшарування в місцях міжчастинних контактів. Структура матеріалу задається представницьким осередком, зображеним на рис. 3, а його ефективні модулі пружності вважаються залежними від

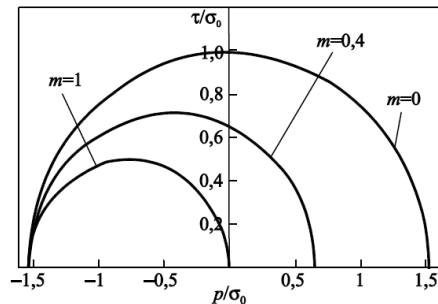


Рис. 1. Криві граничного стану для різних  $m$ .

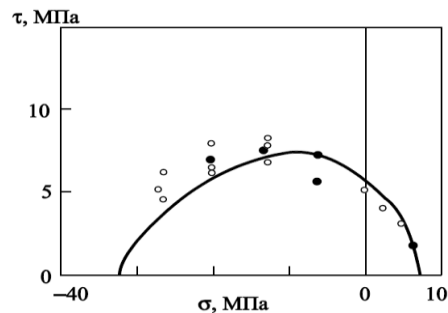


Рис. 2. Контур руйнування графіту в ході одновісного навантаження, поєднаного з крученням і зсувом.

двох параметрів стану, що описують негомогенність матеріалу, а саме пористості і міри площинних дефектів  $k$ . Матеріал твердої фази поклали пружним та нестисливим з деяким значенням модуля зсуву  $G_0$ , який потім в формулі (3) скорочується і не впливає на пластичність. Параметр  $0 < k < 1$  являє собою (рис. 3) відношення довжини відшарованої частини контакту

до повної довжини міжчастинного контакту  $k = \frac{l}{L}$ . Вважалося, що

площинні дефекти дуже тонкі і пористість  $\theta$  визначається лише відношенням об'єму пори в центрі осередку до всього об'єму осередку. Граничні умови на представницькій комірці задавали в параметричному вигляді:

$$\begin{aligned} u_x^{\text{micro}} &= \varepsilon_{xx} \cdot x + \varepsilon_{xy} \cdot y, \\ u_y^{\text{micro}} &= \varepsilon_{xy} \cdot x + \varepsilon_{yy} \cdot y, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\varepsilon_{ij}$  — компоненти макроскопічного тензора деформацій;  $x, y$  — координати в масштабі комірки;  $u_x^{\text{micro}}, u_y^{\text{micro}}$  — компоненти переміщень на границі елементарної комірки.

За таких граничних умов середні по комірці значення компонент тензора деформацій становитимуть  $\langle \varepsilon_{ij}^{\text{micro}} \rangle = \varepsilon_{ij}$ . Відповідно до (4) поле переміщень в об'ємі комірки буде параметрично залежати від  $\varepsilon_{ij}$ . Тому питома потенційна енергія ефективного мікронеоднорідного середовища  $W = W(\varepsilon_{ij})$  може бути обчислена на основі усереднення за об'ємом комірки, параметрично залежного від  $\varepsilon_{ij}$  поля потенційної енергії мікрореформацій. Зауважимо, що через концентрацію напружень на кінцях щілин використовувалась адаптивна сітка скінченних елементів (рис. 3).

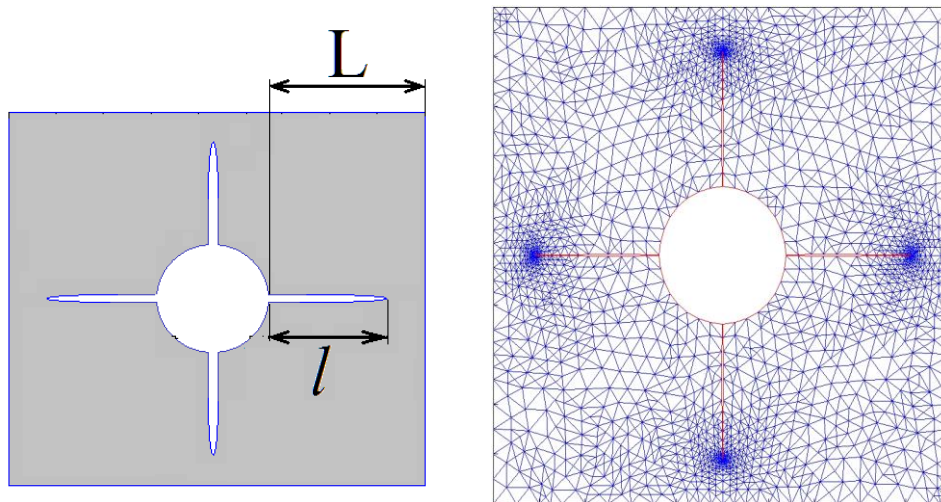


Рис. 3. Представницький осередок та адаптивна сітка скінченних елементів.

Вважали, що в процесі будь-якого однопроменевого (віднульового) навантаження конфігурація тріщин не змінюється і для кожного такого навантаження ефективні властивості можна обчислити усередненням лінійно-пружних властивостей. Для різних напружено-деформованих станів конфігурація відкритих та закритих тріщин є різною і це дає змогу врахувати різноопірність матеріалу. Відмітимо, що за таких припущень залежність між напруженнями та деформаціями для пористого дефектного матеріалу є однорідною функцією першого порядку, хоча і нелінійною.

Визначальні співвідношення різноопірної пружної поведінки залежать від трьох реологічних параметрів ( $K$ ,  $G$ ,  $m$ ). Як слідує з (1), для знаходження пружного потенціалу достатньо осереднити на представницькому осередку питому енергію пружного деформування для трьох різних макроскопічних напружено-деформованих станів і таким чином отримати систему трьох рівнянь для знаходження трьох невідомих ( $K$ ,  $G$ ,  $m$ ). Як такий набір напружено-деформованих станів брались: чистий зсув, всебічний розтяг та всебічний стиск (рис. 4).

Конфігурація дефектів типу щілин за різних умов деформування показані на рис. 4. Вважали, що під дією деформації всебічного розтягу та чистого зсуву дефекти були розімкненими, а за всебічного стиску — повністю зімкненими, тобто на модельній їх не було. Знайшовши ( $K$ ,  $G$ ,  $m$ ), за формулою (3) остаточно знаходимо умову пластичності матеріалу.

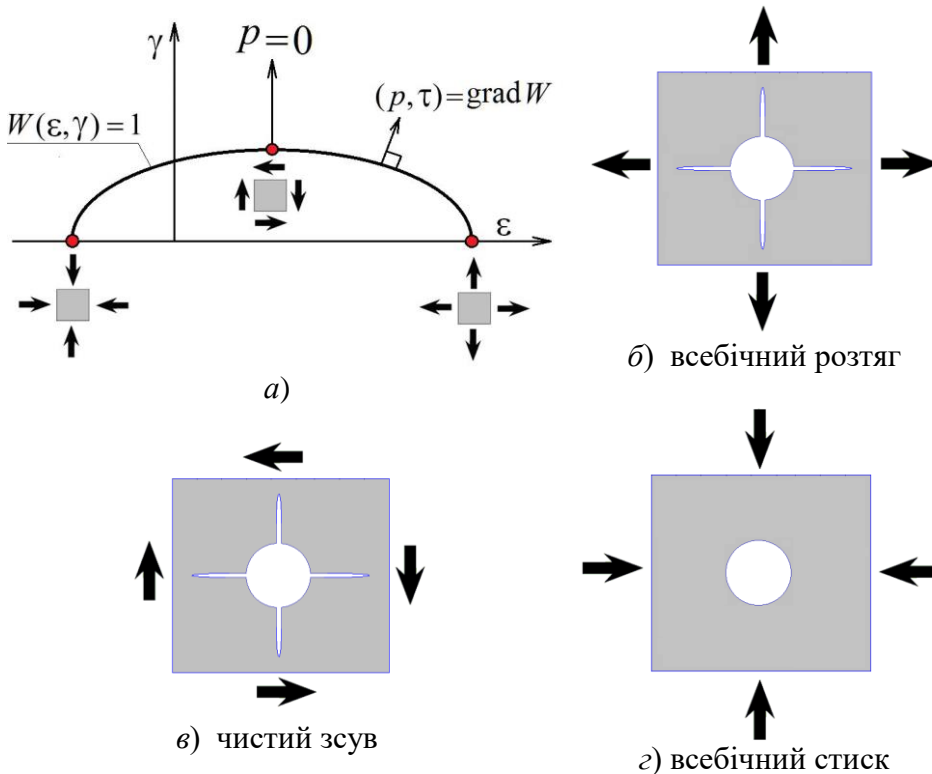


Рис. 4. Контур рівних значень макроскопічної питомої пружної енергії та промені напружено-деформованих станів, за якими здійснюється усереднення (а) та конфігурація дефектів для різних схем деформування (б—г).

### Результати обчислювального моделювання

На рис. 4 та 5 наведено графіки залежностей границі текучості за одновісного розтягу та стиску від пошкодженості  $k$  для різних значень пористості (рис. 4, *a*) та (рис. 5, *a*), а також залежності від пористості за різних  $k$  (рис. 4, *б*, 5, *б*).

Видно, що границі текучості на розтяг та стиск відрізняються тим більше, чим більш пошкодженим є матеріал, тобто чим більше відшарованими є міжчастинні контакти. Також видно, що якщо залежність границь текучості від пористості близька до лінійної, то від дефектності  $k$  вони залежать нелінійно та більш суттєво спадають за великих  $k$ .

На рис. 6 наведено графіки залежностей границі текучості за чистого зсуву від пошкодженості  $k$  та пористості. Порівняння рис. 6 та рис. 4 показує, що границя текучості на зсув суттєво (приблизно на 30%) менш чутлива до пошкодженості, ніж границя текучості на одновісний розтяг.

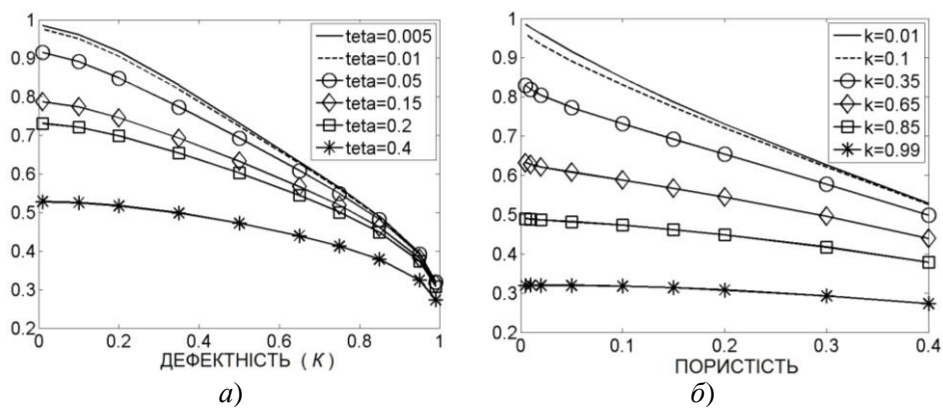


Рис. 4. Залежності границі текучості на одновісний розтяг, нормовані  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_0$  від пошкодженості  $k$  для різних пористостей (*a*) та від пористості для різних  $k$  (*б*).

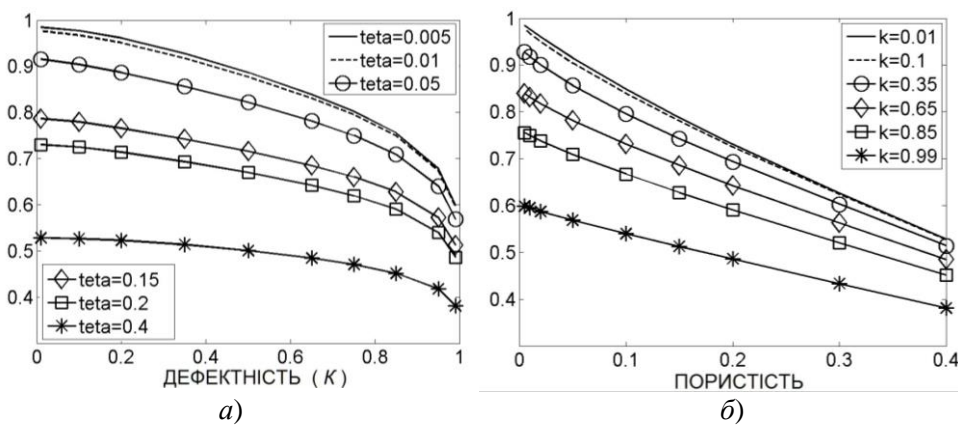


Рис. 5. Залежності границі текучості на одновісний стиск, нормовані  $\sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}\tau_0$ , від пошкодженості  $k$  для різних пористостей (*a*) та від пористості для різних  $k$  (*б*).

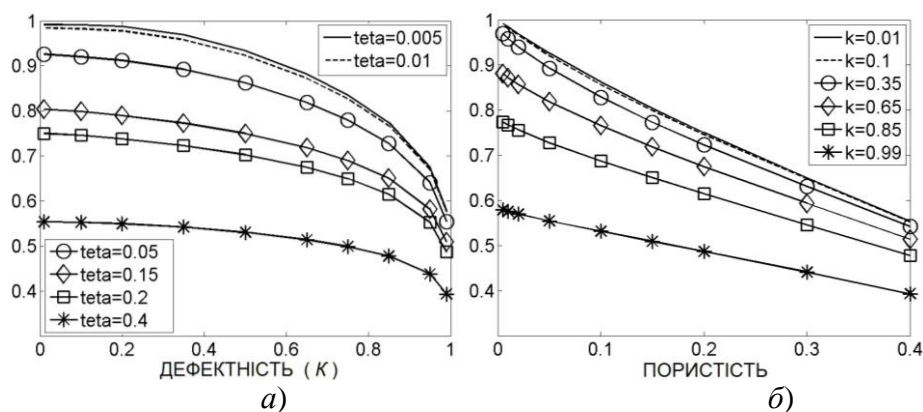


Рис. 6. Залежності границі текучості на зсув нормовані  $\tau_0$  від пошкодженості  $k$  для різних пористостей (а) та від пористості для різних  $k$  (б).

Також зауважимо, що за всебічного стиску відшаровані контакти перестають знімцнювати матеріал і, відповідно, границя текучості в цьому випадку не залежить від  $k$ , а тільки від пористості.

### Висновки

На базі запропонованої раніше авторами моделі пружності різноопірних матеріалів була побудована феноменологічна модель пластичності стисливих матеріалів з розподіленими мікрodefekтами. Також на базі обчислювального моделювання на представницькому осередку, що відображає структуру пошкодженого матеріалу порошкового походження, були визначені залежності модулів феноменологічної моделі пластичності від ступеня відшарованості міжчастинних контактів та пористості. Зокрема, виявилось, що границя текучості на зсув суттєво (на 30%) менш чутлива до пошкодженості, ніж границя текучості на одновісний розтяг.

### Цитована література

1. Штерн М.Б., Кузьмов А.В. Прогнозирование эволюции дефектов и вязкого разрушения в деформационных технологиях современного материаловедения. Физико-технические проблемы современного материаловедения. В 2-х т. / Ред. кол.: И.К. Походня и др.; К.: Академперіодика, 2013. Т. 2. С. 545—566.
2. Скороход В.В., Тучинский Л.И. Условие пластичности пористых тел. *Порошковая металлургия*. 1978. № 11. С. 83—88.
3. Штерн М.Б. Модель упругого деформирования изотропных порошковых материалов, характеризующихся различными свойствами при растяжении и сжатии. *Порошковая металлургия*. 2009. № 5—6. С. 14—29.
4. Мидуков В.З., Рудь В.Д. Экспериментальная проверка основных гипотез теории пластичности пористых тел. *Порошковая металлургия*. 1982. № 1. С. 6—17.
5. Бейгельзимер Я.Е., Варюхин В.Н., Эфрос Б.М. Физическая механика гидростатической обработки материалов. Донецк: Изд-во Донецкого физ.-техн. ин-та НАН Украины, 2000. 192 с.
6. Pavier E., Doremus P. Mechanical behaviour of a lubricated iron powder. *PM'96. Advances in Powder Metallurgy & Particulate Materials*. 1996. Vol. 2, part 6. P. 27—40.

7. Ивашков И.А. Деформирование и разрушение графита при циклическом кручении. *Прочность машин и аппаратов при переменном нагружении*. Челябинск: Челябин. гос. техн. ун-т, 1995. С. 15—23.
8. Dick D.S. Critical state powder flow. *Powder Metal*. 2005. Vol. 48, No. 1. P. 209—211.
9. DiMaggio F.L., Sandler I.S. Material model for granular soils. *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 97. 1971. P. 935—950.

### References

1. Shtern, M. B., Kuzmov, A. V. (2013). Predicting the evolution of defects and viscous fracture in deformation technologies of modern materials science. Physical and technical problems of modern materials science: in 2 volumes. / Editor: I. K. Pohodnya and others. NAS of Ukraine. K.: Akadempriodika, Vol. 2, pp. 545—566 [in Russian].
2. Skorokhod, V. V., Tuchinsky, L. I. (1978). Condition of plasticity of porous bodies. *Poroshkovaya metallurgiya*, Vol. 11, pp. 83—88 [in Russian].
3. Shtern, M. B. (2009). Model of elastic deformation of isotropic powder materials characterized by different tensile and compressive properties. *Poroshkovaya metallurgiya*, Vol. 5—6, pp. 14—29 [in Russian].
4. Midukov, V. Z., Rud, V. D. (1982). Experimental verification of the main hypotheses of the theory of plasticity of porous bodies. *Poroshkovaya metallurgiya*, Vol. 1, pp. 6—17 [in Russian].
5. Beigelzimer, Y. E., Varyukhin, V. N., Efros, B. M. (2000). Physical mechanics of hydrostatic processing of material. Donetsk: Donetsk Publishing House. physical and technical Institute of NAS of Ukraine, 192 p. [in Russian].
6. Pavier, E., Doremus, P. (1996). Mechanical behaviour of a lubricated iron powder. *PM'96. Advances in Powder Metallurgy & Particulate Materials*. Vol. 2, part 6. P. 27—40.
7. Ivashkov, I. A. (1995). Deformation and destruction of graphite during cyclic torsion. *Prochnost mashin i apparatov pri peremennom nagruzhennii*, Chelyabinsk state technical university, pp. 15—23 [in Russian].
8. Dick, D. S. (2005). Critical state powder flow. *Powder Metal*, Vol. 48, No. 1, pp. 209—211.
9. DiMaggio, F. L., Sandler, I. S. (1971). Material model for granular soils. *J. Eng. Mech. Div., ASCE* 97. P. 935—950.

### Modeling of influence of planar defects on plasticity of powder materials by computational methods of micromechanics

A. Kuzmov, M. Shtern, P. Korobko

Institute for Problems in Materials Science NAS of Ukraine, Kyiv

\*E-mail: [kavipms326@gmail.com](mailto:kavipms326@gmail.com)

National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, Kyiv

*Based on the energy concept of the critic stress state, a three-parameter model of plasticity of the Cam-Clay type was formulated. For this phenomenological model, the dependences of the determining parameters on the porosity and damage were found by the method of micromechanical averaging on the unit cell corresponding to the porous damaged material of powder origin. The plastic multi-responce (different yield strength in tension and compression) behavior of this material is found by micromechanical averaging on a unit cell. According to the mechanics of composites, the geometry of the cell represents*



*the structure of a heterogeneous material and the boundary conditions on a unit cell make it possible to relate the stress-strain state at the macro- and meso-level. The averaging was carried out by computer simulation using the finite element method with an adaptive mesh, which was automatically condensed in places of a large gradient of the stress-strain state. The structure of the representative cell corresponds to a powder origin material with “imperfect”, partially stratified, interparticle contacts. In the proposed model the rheological response of a porous damaged material is specified by three moduli, and the structure of such a material is described by two internal state parameters: porosity and the degree of delamination of interparticle contacts. That is, the rheological moduli are functions of porosity and damage. Accordingly, a number of values of each of the moduli were calculated for a certain discrete range of density and damage. The advantage of this approach is precisely in focusing on powder origin materials and not generally on any damaged materials, which makes it possible to take into account the real structure of the damaged material using the methods of mechanics of microheterogeneous materials. According to the simulation results, in particular, it was found that the yield strength for shear is significantly (30%) less sensitive to damage than the yield strength for uniaxial tension.*

**Keywords:** *theory of plasticity, powder materials, micromechanics, damaged materials, stress-strain state.*